

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Variantă 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2\lg 100 + \lg 2 + \lg 5 = 5$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 6$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(3a) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{3x} \cdot 5^2 = 5^x$.
- 5p** 4. Determinați câte submulțimi cu două elemente, ambele numere pare, are mulțimea $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(3,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu aria egală cu 18 și $B = \frac{\pi}{4}$. Arătați că $AB = 6$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(M(1)) = 7$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $M(x) \cdot M(2) = M(x-1)$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care $2\det(M(n)) \leq \det(M(2n))$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - aX + 2a$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(2) = 0$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Pentru $a = 1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 1$.
- 5p** c) Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 8$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x - 4) + x^2 - 2x + 4$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2(x-1)(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} = 4$.
- 5p** c) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{3x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_3^4 f(x)(3x^2 + 1)dx = 14$.

5p	b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} \ln 2$.
5p	c) Arătați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{4 \ln x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ este egală cu $\frac{3e^2 + 5}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2\lg 100 + \lg 2 + \lg 5 = 2 \cdot 2 + \lg 10 =$ $= 4 + 1 = 5$	3p 2p
2.	$f(a) = a - 6$, $f(3a) = 3a - 6$ $a - 6 + 3a - 6 = 0$, de unde obținem $a = 3$	3p 2p
3.	$5^{3x+2} = 5^x$, de unde obținem $3x + 2 = x$ $x = -1$	3p 2p
4.	În mulțimea A sunt 4 numere pare Sunt $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ submulțimi cu două elemente, ambele numere pare	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AC} = (x_C - 3)\vec{i} + (y_C - 1)\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$ $(x_C - 3)\vec{i} + (y_C - 1)\vec{j} = 3\vec{i}$, de unde obținem $x_C = 6$ și $y_C = 1$	3p 2p
6.	$AB = AC$ $\frac{AB \cdot AB}{2} = 18$, deci $AB^2 = 36$, de unde obținem $AB = 6$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 9 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 = 7$	2p 3p
b)	$M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $M(x) \cdot M(2) = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 8x+8 & 6x+4 \\ 0 & 12x+8 & 8x+8 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 8x+8 & 6x+4 \\ 0 & 12x+8 & 8x+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & x-1 \\ 0 & 2x-2 & x+1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p
c)	$\det(M(n)) = n(-n^2 + 4n + 4)$, $\det(M(2n)) = 2n(-4n^2 + 8n + 4)$, pentru orice număr natural n $2n(-n^2 + 4n + 4) \leq 2n(-4n^2 + 8n + 4)$, de unde obținem $n^2(3n - 4) \leq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ și $n = 1$	2p 3p
2.a)	$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + 2a =$ $= 8 - 8 - 2a + 2a = 0$, pentru orice număr real a	3p 2p

b)	$f = X^3 - 2X^2 - X + 2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 =$ $= -1 - 2 + 1 + 2 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X + 1$	3p 2p
c)	$f = (X - 2)(X^2 - a)$; $x_1 = 2$ și $ x_2 = x_3 = \sqrt{a}$, deci $ x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 2\sqrt{a}$ $2 + 2\sqrt{a} = 8$, de unde obținem $a = 9$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(2x - 4) + 2e^x + 2x - 2 =$ $= e^x(2x - 2) + 2x - 2 = 2(x - 1)(e^x + 1), x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(1 - e^x)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - 1)(e^x + 1)}{-e^x} = 4$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ și, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 3 - 2e < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții	2p 3p
2.a)	$\int_3^4 f(x)(3x^2 + 1)dx = \int_3^4 4xdx = 2x^2 \Big _3^4 =$ $= 32 - 18 = 14$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{4x}{3x^2 + 1}dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(3x^2 + 1)'}{3x^2 + 1}dx = \frac{2}{3} \ln(3x^2 + 1) \Big _0^1 =$ $= \frac{2}{3} \ln 4 - \frac{2}{3} \ln 1 = \frac{4}{3} \ln 2$	3p 2p
c)	$g(x) = \frac{(3x^2 + 1) \ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, deci $\mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \left(3x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{3x^2}{2}\right)' \ln x dx +$ $+ \frac{\ln^2 x}{2} \Big _1^e =$ $= 3 \left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) \Big _1^e + \frac{1}{2} = \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3e^2 + 5}{4}$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_2 = 14$ și $a_3 = 18$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Arătați că $(f \circ f)(5) = 9$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - x}$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, 7, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2, 1)$. Determinați coordonatele punctului B pentru care $\overline{AB} = 2\overline{OA}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $BC = 12$ și $AB = \frac{BC}{2}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(B(1)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $B(x) \cdot B(y) - B(x+y) = xyA$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $B(x) \cdot B(x+1) - B(2x) \cdot B(1) = xA$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + 2 - a$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(1) = 4$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Pentru $a = 2$, determinați rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 2e^{2x}(x^2 + x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
- 5p** c) Determinați imaginea funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 6x^2 + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(x) - 6x^2) dx = \frac{12}{5}$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Arătați că $\int_1^6 \frac{x^3}{f(x)-1} dx = \frac{\ln 6}{2}$. |
| 5p | c) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right) = 6$. |

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 14 = \frac{a_1 + 18}{2}$ $a_1 = 10$	3p 2p
2.	$f(5) = 7$ $(f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(7) = 9$	2p 3p
3.	$x^2 + 2x + 1 = 1 - x$, de unde obținem $x^2 + 3x = 0$ $x = -3$ sau $x = 0$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 4 = 16$ numere	2p 3p
5.	$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = (x_B - 2)\vec{i} + (y_B - 1)\vec{j}$, unde $B(x_B, y_B)$ $(x_B - 2)\vec{i} + (y_B - 1)\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, de unde obținem $x_B = 6$ și $y_B = 3$	3p 2p
6.	$AB = 6$, $AC = 6\sqrt{3}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 2 + 0 + 0 - 0 - 2 - 0 = 0$	2p 3p
b)	$B(x) \cdot B(y) - B(x+y) = \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1+xy & y+x \\ 0 & x+y & xy+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & x+y & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = xyA$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$B(x) \cdot B(x+1) = B(2x+1) + (x^2 + x)A$, $B(2x) \cdot B(1) = B(2x+1) + 2xA$, de unde obținem $B(x) \cdot B(x+1) - B(2x) \cdot B(1) = (x^2 - x)A$, pentru orice număr real x $(x^2 - x)A = xA$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$	3p 2p
2.a)	$f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + 2 - a =$ $= 1 + a + 1 + 2 - a = 4$, pentru orice număr real a	3p 2p

b)	$f = X^3 + 2X^2 + X = X(X^2 + 2X + 1)$	2p
	Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = x_2 = -1$ și $x_3 = 0$	3p
c)	$x_1 x_2 x_3 = -2 + a$, $(x_1 - x_1^2)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) = x_1 x_2 x_3 (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = (-2 + a)f(1)$	3p
	$4(-2 + a) = 4$, de unde obținem $a = 3$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^2 - 2)'e^{2x} + (x^2 - 2)(e^{2x})' =$ $= 2xe^{2x} + (x^2 - 2) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 2), x \in \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{2(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{2x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 1$; pentru orice $x \in (-\infty, -2]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -2]$; pentru orice $x \in [-2, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-2, 1]$ și pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$ Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = -e^2$ și f este continuă, imaginea funcției f este $[-e^2, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_{-1}^1 (f(x) - 6x^2) dx = \int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + x \right) \Big _{-1}^1 =$ $= \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1 = \frac{12}{5}$	3p 2p
b)	$\int_1^6 \frac{x^3}{f(x) - 1} dx = \int_1^6 \frac{x}{x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \int_1^6 \frac{(x^2 + 6)'}{x^2 + 6} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6) \Big _1^6 =$ $= \frac{\ln 42}{2} - \frac{\ln 7}{2} = \frac{\ln 6}{2}$	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} \int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x (f(2t) - f(t)) dt \right)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{3x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^4 + 18x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 6) = 6$	3p 2p

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 12$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 8$. Determinați numărul real m pentru care $f(1+m) = 1 - m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 - 3x + 5) = \lg 5$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, numărul $\sqrt{n+1}$ să fie natural.
- 5p 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,0)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreptele OA și BC sunt paralele.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AC = 9$ și $B = \frac{\pi}{3}$. Arătați că $AB = 3\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = 2A(x)$.
- 5p c) Arătați că, dacă matricea $A(x)$ este inversabilă, atunci și matricea $A(-x)$ este inversabilă.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + \frac{2x+2y-1}{4}$.
- 5p a) Arătați că $1 \circ 1 = \frac{7}{4}$.
- 5p b) Arătați că $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x^3}{(x-1)^2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Arătați că ecuația $f(x) = m$ are exact două soluții, pentru orice $m \in (27, +\infty)$.

	2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + x \ln x$.
5p	a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) - x \ln x) dx = 6$.
5p	b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - x - 1) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.
5p	c) Determinați numărul real nenul a pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(f(x) - x \ln x)^2}$ este egal cu $\frac{7\pi}{24a}$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow 12 = \frac{2 + a_3}{2}$ $a_3 = 22$	3p 2p
2.	$f(1+m) = m-7$, pentru orice număr real m $m-7 = 1-m$, de unde obținem $m = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - 3x + 5 = 5$, de unde obținem $x^2 - 3x = 0$ $x = 0$ sau $x = 3$, care convin	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere n pentru care numărul $\sqrt{n+1}$ este natural, deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{7}{90}$	2p 3p
5.	$m_{OA} = 2$ $m_{BC} = \frac{a}{2}$ și, cum $m_{OA} = m_{BC}$, obținem $a = 4$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$, deci $\sqrt{3} = \frac{9}{AB}$ $AB = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 4 - 0 - 1 - 0 = 3$	2p 3p
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1+x & 1+x & 1+x \\ x-1 & x-1 & x-1 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} 1+x & 1+x & 1+x \\ x-1 & x-1 & x-1 \\ x+1 & x+1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2x & 2x \\ 0 & 0 & 2x-2 \\ 2x & 2 & 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
c)	$\det(A(x)) = (x-1)^2(x+1)$ și $\det(A(x)) \neq 0$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ Cum $-x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, obținem $\det(A(-x)) \neq 0$, deci $A(-x)$ este inversabilă	3p 2p
2.a)	$1 \circ 1 = 1 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1}{4} =$ $= 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$	3p 2p

b)	$x \circ \frac{1}{2} = x \cdot \frac{1}{2} + \frac{2x+2 \cdot \frac{1}{2}-1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{1}{2} \circ x = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 2x - 1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	3p
c)	$\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} - x^2$, $\left(\frac{1}{2} - x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x\right) \circ \left(\frac{1}{2} + x^2\right) = \frac{1}{2} - x^4$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{1}{2} - x^4 = \frac{1}{2} - x^2$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 0$ sau $x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{12x^2(x-1)^2 - 4x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$	3p
	$= \frac{12x^3 - 12x^2 - 8x^3}{(x-1)^3} = \frac{4x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{(x-1)^2} = 4$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 8$, deci dreapta de ecuație $y = 4x + 8$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, 3)$, deci f este strict descrescătoare pe $(1, 3)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (3, +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(3, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, $f(3) = 27$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă, deci ecuația $f(x) = m$ are exact două soluții pentru orice $m \in (27, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) - x \ln x) dx = \int_1^3 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = 6$	2p
b)	$\int_1^e (f(x) - x - 1) dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \frac{x^2}{4} \Big _1^e =$	3p
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$	2p
c)	$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, $x \in [1, 3]$, deci $V = \pi \int_1^3 g^2(x) dx = \pi \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^4} dx = \pi \left(-\frac{1}{3(x+1)^3}\right) \Big _1^3 = \frac{7\pi}{192}$	3p
	$\frac{7\pi}{192} = \frac{7\pi}{24a}$, de unde obținem $a = 8$	2p